ΛΥΣΕΙΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

2. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 97

Β. 1.Σ , 2.Λ, 3.Λ , 4.Σ , 5.Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0 \iff \lambda^2 - 2 + 3 - 2\lambda = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1$

Οπότε ο z γίνεται $z = -1 + i$

β.

$|w| = 5 \iff \sqrt{k^2 + 16} = 5 \iff k^2 + 16 = 25 \iff k = 3$ ή $\cancel{k = -3}$

γ.

$$
\begin{aligned}
z + \mu\bar{z} = 3i - w \iff & -1 + i + \mu(-1 - i) = 3i - (3 + 4i) \\
& -1 + i - \mu - \mu i = 3i - 3 - 4i \\
& (-1 - \mu) + (1 - \mu)i = -3 - i \\
& -1 - \mu = -3 \quad \text{και} \quad 1 - \mu = -1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 2
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ 3ο

α .

$f(1) = 1 \iff 1 + k + 3 - 2 = 1 \iff k = -1$

β.

Για $k = -1$ έχουμε $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$ με $f\,'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

Η διακρίνουσα του τριώνυμου $3x^2 - 2x + 3$ είναι $\Delta = -32 < 0$,

άρα $3x^2 - 2x + 3 > 0$. Οπότε $f\,'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει ακρότατα.

γ.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ με $f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$.

Δηλαδή $f(0)f(1) < 0$.

Επομένως, με βάση το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$. Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η λύση είναι μοναδική

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Αφού η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, θα ισχύουν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$$

Όμως $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(2-\alpha)x^2 - kx + 2}{x-3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2-\alpha)x^2 - kx + 2}{x^2 - 3x}$

Για να είναι το όριο αυτό ίσο με 1, θα πρέπει $2-\alpha \neq 0 \iff \alpha \neq 2$.

Τότε το όριο γίνεται $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2-\alpha)x^2}{x^2} = 2-\alpha$

Επομένως πρέπει $2-\alpha = 1 \iff \alpha = 1$.

Τότε $f(x) = \dfrac{x^2 - kx + 2}{x-3}$

Επίσης $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 - kx + 2}{x-3} - x\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - kx + 2 - x^2 + 3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3-k)x + 2}{x-3}$$

Για να είναι το όριο αυτό ίσο με το 0, θα πρέπει $3-k = 0 \iff k = 3$

Οπότε ο τύπος της f γίνεται $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-3}$

β.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1\,,\,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1\,,\,2)$ με $f(1) = 0 = f(2)$.

Οπότε, με βάση το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα των x.

γ.

Είναι $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-3) - (x^2 - 3x + 2)}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$

$$f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad f(1) = 0$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x-1) \iff$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$